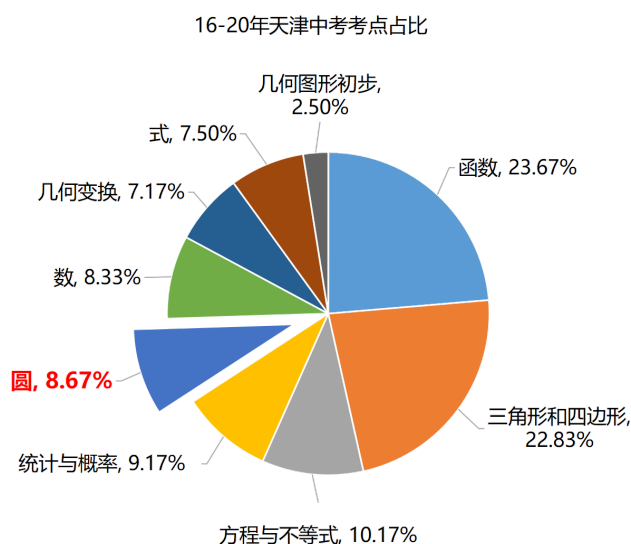


第1讲圆综合之角度专项训练

《圆综合》属于整个初中数学几何部分的重要知识，是《四边形与圆基础》的后续模块，需要学生在掌握圆中基础定理的前提下，进一步探究圆中角度与线段问题，综合性较强。本模块的内容在中考中常以21题解答题的形式出现，占10分的分值，题目难度适中，需要学生进行系统的学习、归纳、整理，以提高综合运用能力。

本模块侧重于圆的综合，题目多与圆中重要定理，勾股定理，全等、相似基础等结合，适用于一轮复习，圆专项的查漏补缺，本模块分为角度专项训练、线段专项训练 2 讲内容，配套练习进一步巩固所学内容，专项练习，突破重点题型。

知己知彼



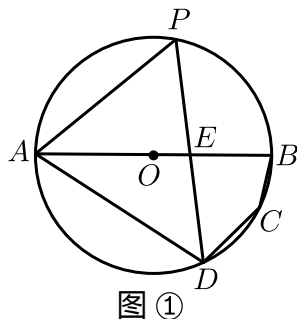
年份	分值	占比	题号
2020年	10	8%	21
2019年	10	8%	21
2018年	10	8%	21
2017年	10	8%	21
2016年	10	8%	21

一、已知角度求角度

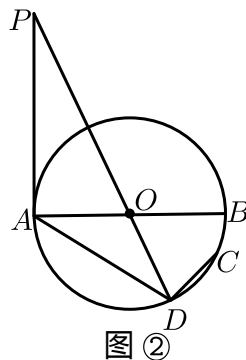
1. 圆与三角形

1. 已知四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, AB 为 $\odot O$ 直径, $\angle BCD = 148^\circ$.

(1) 如图①, 若 E 为 AB 上一点, 延长 DE 交 $\odot O$ 于点 P , 连接 AP , 求 $\angle APD$ 的大小.



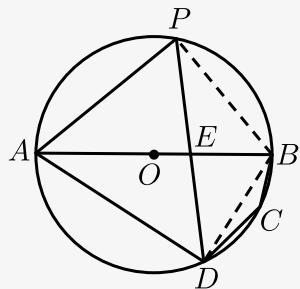
(2) 如图②, 过点 A 作 $\odot O$ 的切线, 与 DO 的延长线交于点 P , 求 $\angle APD$ 的大小.



【答案】 (1) $\angle APD = 58^\circ$.

(2) $\angle APD = 26^\circ$.

【解析】 (1) 连接 BD ,



$\because ABCD$ 为圆内接四边形,

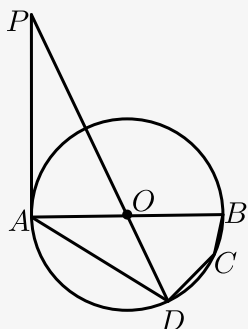
$\therefore \angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$,

$\because \angle BCD = 145^\circ$,

$\therefore \angle BAD = 32^\circ$,

$\because AB$ 为 $\odot O$ 直径,
 $\therefore \angle BDA = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ABD = 58^\circ$,
 $\therefore \angle APD = \angle ABD = 58^\circ$.

(2) $\because OA = OD$,
 $\therefore \angle ADO = \angle OAD$,
 $\because DP$ 切 $\odot O$ 于点 A ,
 $\therefore OA \perp PA$,
 $\therefore \angle PAD = \angle PAB + \angle OAD$,
 $\angle PAD = 122^\circ$,
 $\because \angle PAD + \angle ADO + \angle APD = 180^\circ$,
 $\therefore \angle APD = 26^\circ$.



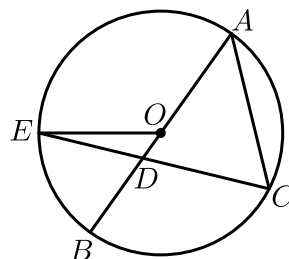
【标注】【知识点】圆内接四边形综合

【重点强调】

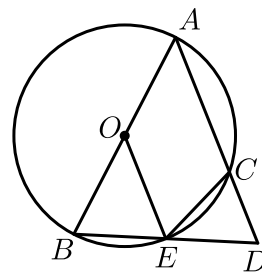
2019年天津武清区初三一模第21题10分

2. 在 $\odot O$ 中, AB 是 $\odot O$ 直径, AC 是弦, $\angle BAC = 50^\circ$.

(1) 如图, D 是 AB 上一点, $AD = AC$, 延长 CD 交 $\odot O$ 于点 E , 求 $\angle CEO$ 的大小.



(2) 如图, D 是 AC 延长线上一点, $AD = AB$, 连接 BD 交 $\odot O$ 于点 E , 求 $\angle CEO$ 的大小.



【答案】 (1) 15° .

(2) 65° .

【解析】 (1) $\because AD = AC$, $\angle A = 50^\circ$,

$$\therefore \angle C = \angle ADC = 65^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADE = 180^\circ - \angle ADC$$

$$= 180^\circ - 65^\circ$$

$$= 115^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOE = 2\angle C = 130^\circ ,$$

$$\therefore \angle CEO = \angle AOE - \angle ADE$$

$$= 130^\circ - 115^\circ$$

$$= 15^\circ .$$

(2) $\because AD = AB$, $\angle A = 50^\circ$,

$$\therefore \angle D = \angle B = 65^\circ ,$$

$$\therefore OB = OE ,$$

$$\therefore \angle OEB = \angle B = 65^\circ ,$$

$\because$ 四边形 $ABEC$ 是圆内接四边形 ,

$$\therefore \angle BEC = 180^\circ - \angle A = 130^\circ ,$$

$$\therefore \angle CEO = \angle CEB - \angle OEB$$

$$= 130^\circ - 65^\circ$$

$$= 65^\circ .$$

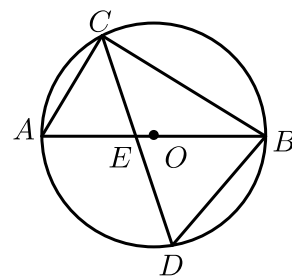
【标注】【知识点】圆内接四边形综合

【重点强调】

2018年天津北辰区初三二模第21题10分

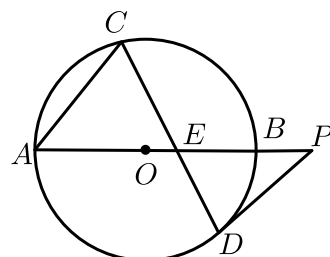
3. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径 , 弦 CD 与 AB 相交于点 E , $\angle BAC = 52^\circ$.

(1) 如图① , 若 D 为 $\widehat{AB}$ 的中点 , 求 $\angle ABC$ 和 $\angle ABD$ 的大小 .



图①

(2) 如图②, 过点 D 作 $\odot O$ 的切线, 与 AB 的延长线交于点 P , 若 $AE = AC$, 求 $\angle P$ 的大小.



图②

【答案】 (1) $38^\circ, 45^\circ$.

(2) 38° .

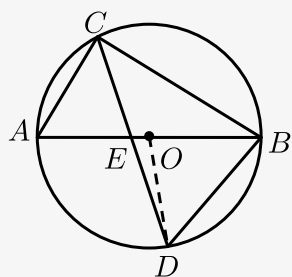
【解析】 (1) $\because AB$ 为 $\odot O$ 直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 52^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ,$$

连接 OD ,

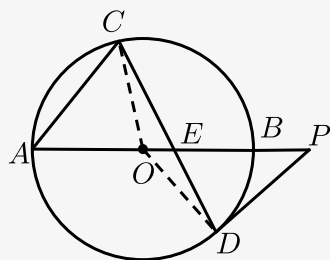


$\because D$ 为 $\widehat{AB}$ 中点,

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \frac{1}{2} \angle AOD = 45^\circ.$$

(2) 连 OD 、 OC ,



$$\begin{aligned}
 &\because AC = AE, \\
 &\therefore \angle ACE = \angle AEC = \frac{180^\circ - 52^\circ}{2} = 64^\circ, \\
 &\because OA = OC = OD, \\
 &\therefore \angle OCA = \angle OAC = 52^\circ, \\
 &\therefore \angle ODC = \angle OCD = 64^\circ - 52^\circ = 12^\circ, \\
 &\therefore \angle DOP = 64^\circ - 12^\circ = 52^\circ, \\
 &\because DP \text{ 为 } \odot O \text{ 切线}, \\
 &\therefore \angle ODP = 90^\circ, \\
 &\therefore \angle P = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ.
 \end{aligned}$$

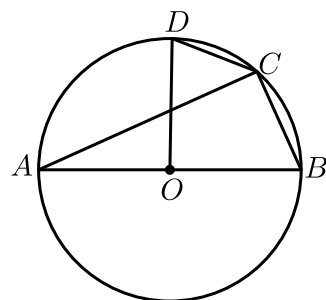
【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

【重点强调】

2020年天津红桥区初三二模第21题10分

4. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， C, D 是 $\odot O$ 上 AB 同侧的两点， $\angle BAC = 25^\circ$.

(1) 如图①，若 $OD \perp AB$ ，求 $\angle ABC$ 和 $\angle ODC$ 的大小.



图①

(2) 如图②，过点 C 作 $\odot O$ 的切线，交 AB 延长线于点 E ，若 $OD \parallel EC$ ，求 $\angle ACD$ 的大小.

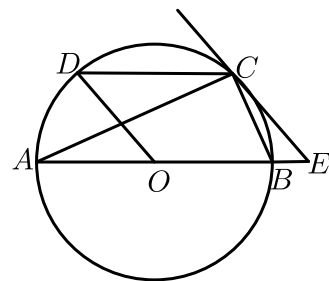


图 ②

【答案】 (1) $\angle ABC = 65^\circ$, $\angle ODC = 70^\circ$.

(2) 20° .

【解析】 (1) $\because AB$ 为直径 ,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ .$$

$$\text{又} \because \angle CAB = 25^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ .$$

$$\because \widehat{AD} = \widehat{AD} ,$$

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD = 45^\circ .$$

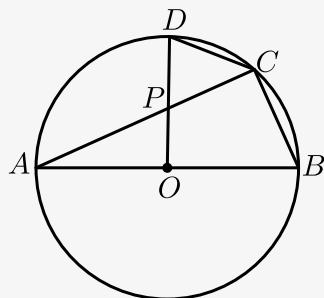
设 OD 与 AC 交点为 P ,

$$\because \angle PAO = 25^\circ , \angle POA = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle APO = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ ,$$

$$\therefore \angle DPC = 65^\circ ,$$

$$\therefore \angle ODC = 180^\circ - 45^\circ - 65^\circ = 70^\circ .$$



(2) $\because \widehat{BC} = \widehat{BC} ,$

$$\therefore \angle BOC = 2\angle BAC = 50^\circ .$$

$\because CE$ 为切线 ,

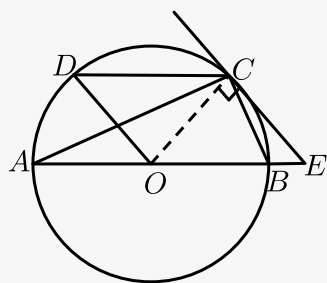
$$\therefore \angle OCE = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle E = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ .$$

$\because OD \parallel EC ,$

$$\therefore \angle DOA = \angle CEO = 40^\circ .$$

$$\begin{aligned} \because \widehat{AD} &= \widehat{AD}, \\ \therefore \angle ACD &= \frac{1}{2} \angle AOD = 20^\circ. \end{aligned}$$



【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

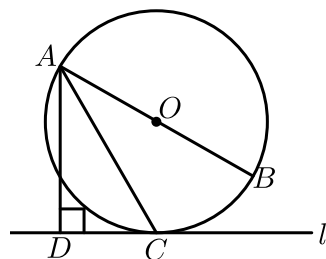
【重点强调】

2019年天津北辰区初三二模第21题10分

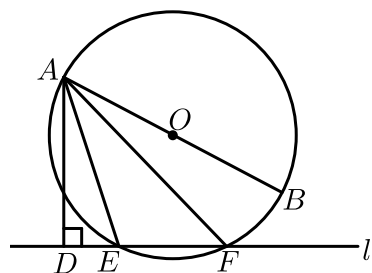
🔗 经典再现

5. 已知直线 l 与 $\odot O$, AB 是 $\odot O$ 的直径, $AD \perp l$ 于点 D .

(1) 如图, 当直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 C 时, 若 $\angle DAC = 30^\circ$, 求 $\angle BAC$ 的大小.



(2) 如图, 当直线 l 与 $\odot O$ 相交于点 E 、 F 时, 若 $\angle DAE = 18^\circ$, 求 $\angle BAF$ 的大小.



【答案】(1) 30° .

(2) 18° .

【解析】(1) 连接 OC ,

$\because$ 直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 C ,

$\therefore OC \perp l$,

$\because AD \perp l$,

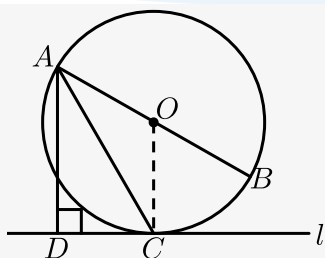
$\therefore OC \parallel AD$,

$\therefore \angle OCA = \angle DAC$,

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle BAC = \angle OCA$,

$\therefore \angle BAC = \angle DAC = 30^\circ$.



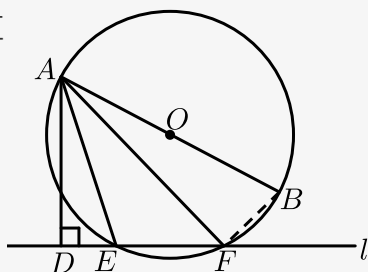
(2) 方法一：连接BF，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直

径，

$\therefore \angle AFB = 90^\circ$,

$\therefore$



$\angle BAF = 90^\circ - \angle B$,

$\therefore \angle AEF = \angle ADE + \angle DAE = 90^\circ + 18^\circ = 108^\circ$,

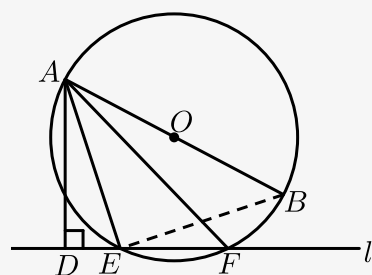
在 $\odot O$ 中，四边形ABFE是圆的内接四边形，

$\therefore \angle AEF + \angle B = 180^\circ$,

$\therefore \angle B = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$,

$\therefore \angle BAF = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

方法二：连接BE，



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$,

$\therefore \angle AED + \angle BEF = 90^\circ$,

$\because \angle AED + \angle DAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BEF = \angle DAE = 18^\circ$,

$\therefore \widehat{BF} = \widehat{BF}$,

$\therefore \angle BAF = \angle BEF = 18^\circ$.

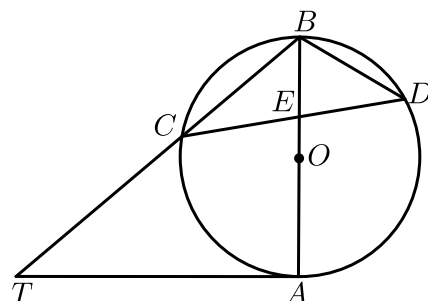
【标注】【知识点】圆内接四边形综合

【重点强调】

2013年天津中考真题第22题10分

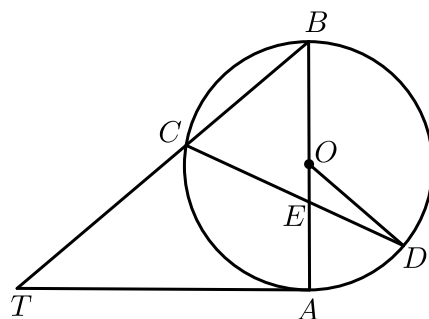
6. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， AT 是 $\odot O$ 的切线， $\angle ABT = 50^\circ$ ， BT 交 $\odot O$ 于点 C ， E 是 AB 上的一点，延长 CE 交 $\odot O$ 于点 D 。

(1) 如图①，求 $\angle T$ 和 $\angle CDB$ 的大小。



图①

(2) 如图②，当 $BE = BC$ 时，求 $\angle CDO$ 的大小。



图②

【答案】(1) $\angle T = 40^\circ$ ， $\angle CDB = 40^\circ$ 。

(2) $\angle CDO = 15^\circ$ 。

【解析】(1) 如图，连接 AC ，

$\because AT$ 是 $\odot O$ 的切线， AB 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore AT \perp AB$ ，即

$\angle TAB = 90^\circ$ ，

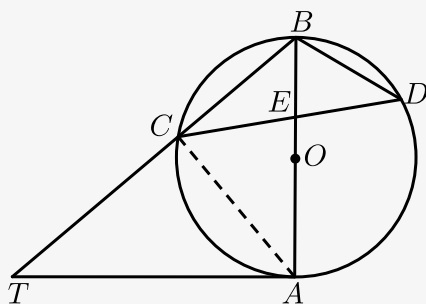
$\because \angle ABT = 50^\circ$ ，

$\therefore \angle T = 90^\circ - \angle ABT = 40^\circ$ ，

由 AB 是 $\odot O$ 的直径，得 $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CAB = 90^\circ - \angle ABC = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle CDB = \angle CAB = 40^\circ$ 。



(2) 如图, 连接 AD ,

在 $\triangle BCE$ 中,

$$BE = BC,$$

$$\angle EBC = 50^\circ,$$

$\therefore$

$$\angle BCE = \angle BEC = 65^\circ,$$

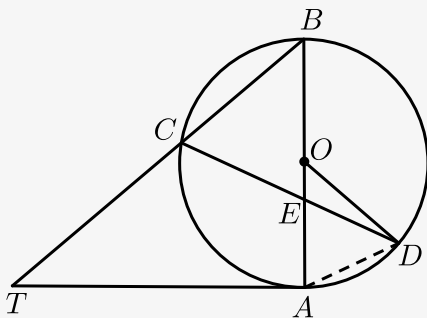
$$\therefore \angle BAD = \angle BCD = 65^\circ,$$

$$\because OA = OD,$$

$$\therefore \angle ODA = \angle OAD = 65^\circ,$$

$$\because \angle ADC = \angle ABC = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle CDO = \angle ODA - \angle ADC = 15^\circ.$$



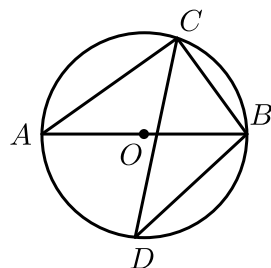
【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

【重点强调】

2017年天津中考真题第21题10分

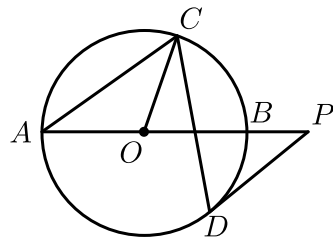
7. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 CD 与 AB 相交, $\angle BAC = 38^\circ$.

(1) 如图①, 若 D 为 $\widehat{AB}$ 的中点, 求 $\angle ABC$ 和 $\angle ABD$ 的大小.



图①

(2) 如图②, 过点 D 作 $\odot O$ 的切线, 与 AB 的延长线交于点 P , 若 $DP \parallel AC$, 求 $\angle OCD$ 的大小.



图②

【答案】(1) $\angle ABC = 52^\circ$, $\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$.

(2) $\angle OCD = 26^\circ$.

【解析】(1) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BAC = 38^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ,$$

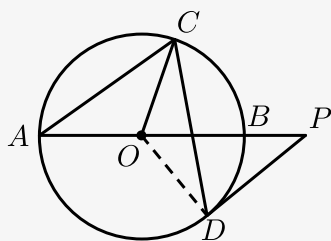
$\because D$ 为 $\widehat{AB}$ 的中点,

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{BD},$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD = 45^\circ.$$

(2) 如图, 连接 OD ,



$\because OP$ 切 $\odot O$ 于点 D ,

$$\therefore OD \perp DP,$$

$$\text{即} \angle ODP = 90^\circ,$$

$$\because DP \parallel AC,$$

$$\therefore \angle BAC = 38^\circ,$$

$$\therefore \angle P = \angle BAC = 38^\circ,$$

$\because \angle AOD$ 是 $\angle ODP$ 的外角,

$$\therefore \angle AOD = \angle ODP + \angle P = 128^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD = 64^\circ,$$

又 $\because OA = OC$,

$$\therefore \angle ACO = \angle A = 38^\circ,$$

$$\therefore \angle OCD = \angle ACD - \angle ACO = 64^\circ - 38^\circ = 26^\circ.$$

【标注】【知识点】圆与特殊角

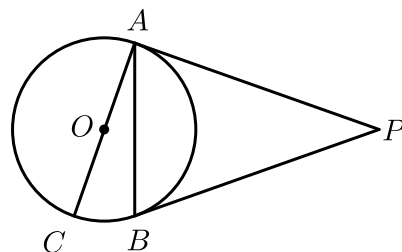
【重点强调】

2018年天津中考真题第21题10分

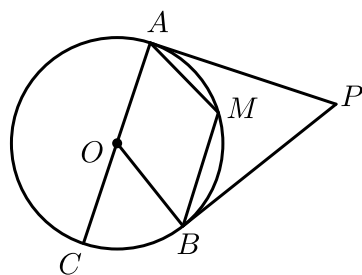
2. 切线长定理

8. 已知, AC 是 $\odot O$ 的直径, PA, PB 是 $\odot O$ 的切线, 切点分别是点 A, B .

(1) 如图①, 若 $\angle BAC = 25^\circ$, 求 $\angle P$ 的度数.



(2) 如图②, 若 M 是劣弧 AB 上一点, $\angle AMB = \angle AOB$, 求 $\angle P$ 的度数.



【答案】(1) 50° .

(2) 60° .

【解析】(1) $\because PA, PB$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore PA = PB,$$

$$\therefore \angle PAB = \angle PBA,$$

$\because PA$ 为切线,

$$\therefore CA \perp PA.$$

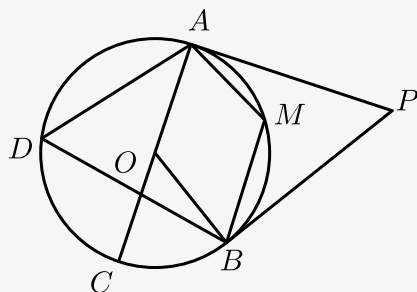
$$\therefore \angle CAP = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle PAB = 90^\circ - \angle BAC = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle P = 180^\circ - 2\angle PAB = 50^\circ.$$

(2) 在弧 AC 上取一点 D , 连接 AD, BD ,



$$\therefore \angle AOB = 2\angle ADB.$$

$$\begin{aligned}
 &\because \angle AMB + \angle ADB = 180^\circ, \\
 &\angle AMB = \angle AOB, \\
 &\therefore \angle ADB + 2\angle ADB = 180^\circ, \\
 &\therefore \angle ADB = 60^\circ, \\
 &\therefore \angle AOB = 120^\circ, \\
 &\therefore \angle P = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ.
 \end{aligned}$$

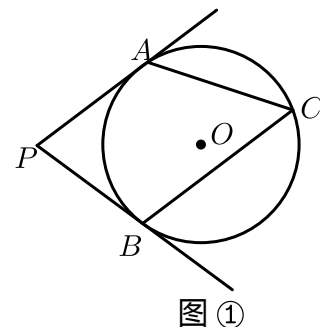
【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

【重点强调】

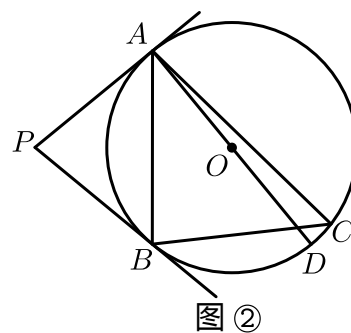
2020年天津和平区初三二模第21题10分

9. 已知 PA ， PB 分别与 $\odot O$ 相切于点 A ， B ， $\angle APB = 80^\circ$ ， C 为 $\odot O$ 上一点．

(1) 如图①，求 $\angle ACB$ 的大小．



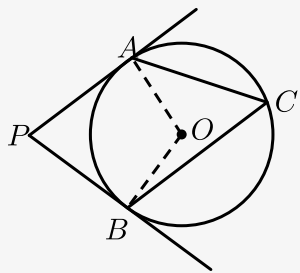
(2) 如图②， AD 为 $\odot O$ 的直径，若 $AB = BC$ ，求 $\angle DAC$ 的大小．



【答案】(1) 50° ．

(2) 10° ．

【解析】(1) 连接 OA 、 OB ，



$\because PA、PB$ 与 $\odot O$ 相切，

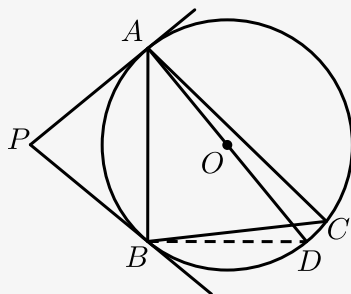
$\therefore \angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$.

$\because \angle APB = 80^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 80^\circ = 100^\circ$,

$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 50^\circ$.

(2) 连 BD ,



$\because AD$ 为 $\odot O$ 直径，

$\therefore \angle ABD = 90^\circ$.

$\because AB = BC$,

$\therefore \angle BAC = \angle ACB = 50^\circ$.

$\because \angle ADB = \angle ACB = 50^\circ$,

$\therefore \angle BAD = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$,

$\therefore \angle CAD = \angle BAC - \angle BAD = 10^\circ$.

【标注】【知识点】切线的性质定理

【知识点】圆周角定理以及应用

【能力】推理论证能力

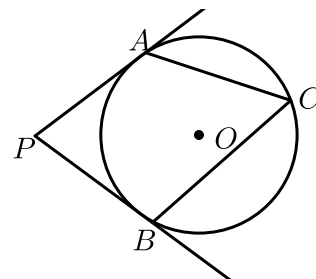
【重点强调】

2020年天津红桥区初三一模第21题10分

 经典再现

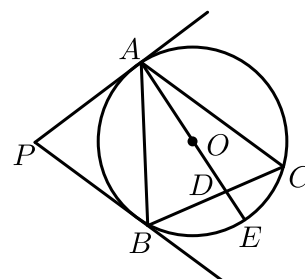
10. 已知 PA, PB 分别与 $\odot O$ 相切于点 A, B , $\angle APB = 80^\circ$, C 为 $\odot O$ 上一点.

(1) 如图①, 求 $\angle ACB$ 的大小.



图①

(2) 如图②, AE 为 $\odot O$ 的直径, AE 与 BC 相交于点 D , 若 $AB = AD$, 求 $\angle EAC$ 的大小.

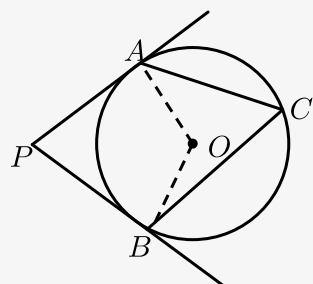


图②

【答案】(1) 50° .

(2) 20° .

【解析】(1)



如图, 连接 OA, OB ,

$\because PA, PB$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OA \perp PA, OB \perp PB$,

即 $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$,

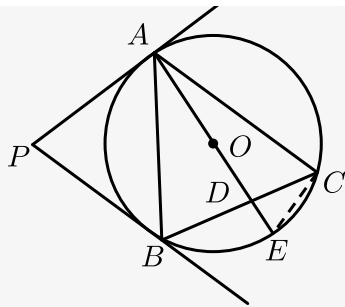
$\because \angle APB = 80^\circ$,

$\therefore$ 在四边形 $OAPB$ 中, $\angle AOB = 360^\circ - \angle OAP - \angle OBP - \angle APB = 100^\circ$.

$\because$ 在 $\odot O$ 中, $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$,

$\therefore \angle ACB = 50^\circ$.

(2)



如图，连接 CE ，

$\because AE$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACE = 90^\circ$ ，

由(1)知， $\angle ACB = 50^\circ$ ， $\angle BCE = \angle ACE - \angle ACB = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle BCE = 40^\circ$ ，

$\because$ 在 $\triangle ABD$ 中， $AB = AD$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle ABD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAE) = 70^\circ$ ，

又 $\because \angle ADB$ 是 $\triangle ADC$ 的一个外角，

$\therefore \angle EAC = \angle ADB - \angle ACB$ ，

$\therefore \angle EAC = 20^\circ$ 。

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

【重点强调】

2019年天津中考真题第21题10分

3. 垂径定理及推论

典题精炼

11. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， C 为 $\odot O$ 上一点。

(1) 如图1，若 C 为半圆的中点，求 $\angle CAB$ 的度数。

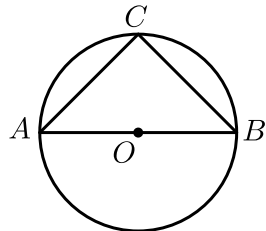


图1

(2) 如图2，若 $\angle CAB = 20^\circ$ ， D 为 AC 的中点，连接 OD 并延长交 $\odot O$ 于点 E ，过点 C 的切线 CF 与 AE 的延长线交于点 F ，求 $\angle ECF$ 的度数。

【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】圆周角定理的推论

【知识点】切线的性质定理

【重点强调】

2018年天津滨海新区初三一模第21题10分

经典再现

12. 在 $\odot O$ 中, AB 为直径, C 为 $\odot O$ 上一点.

(1) 如图①, 过点 C 作 $\odot O$ 的切线, 与 AB 的延长线相交于点 P , 若 $\angle CAB = 27^\circ$, 求 $\angle P$ 的大小.

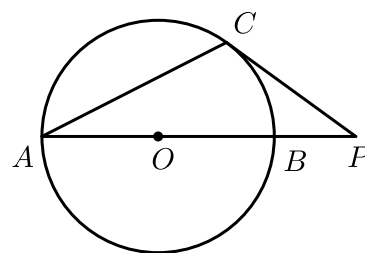


图 1

(2) 如图②, D 为 $\widehat{AC}$ 上一点, 且 OD 经过 AC 的中点 E , 连接 DC 并延长, 与 AB 的延长线相交于点 P , 若 $\angle CAB = 10^\circ$, 求 $\angle P$ 的大小.

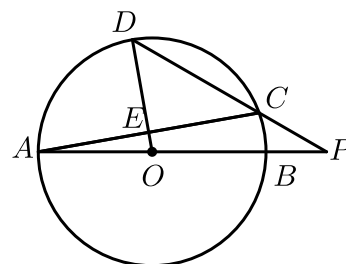


图 2

【答案】(1) 36° .

(2) 30° .

【解析】(1) 如图, 连接 OC ,

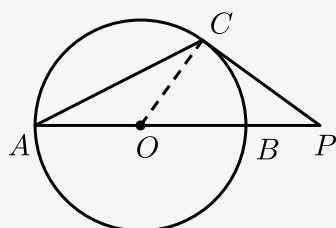


图 1

$\because \odot O$ 与 PC 相切于点 C ,

$\therefore OC \perp PC$ ，即 $\angle OCP = 90^\circ$ ，

$\because \angle CAB = 27^\circ$ ，

$\therefore \angle COB = 2\angle CAB = 54^\circ$ ，

在 $Rt\triangle AOE$ 中， $\angle P + \angle COP = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle P = 90^\circ - \angle COP = 36^\circ$ 。

(2) $\because E$ 为 AC 的中点，

$\therefore OD \perp AC$ ，即 $\angle AEO = 90^\circ$ ，

在 $Rt\triangle AOE$ 中，由 $\angle EAO = 10^\circ$ ，

得 $\angle AOE = 90^\circ - \angle EAO = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD = 40^\circ$ ，

$\because \angle ACD$ 是 $\triangle ACP$ 的一个外角，

$\therefore \angle P = \angle ACD - \angle A = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ$ 。

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】垂径定理以及应用

【知识点】切线的性质定理

【知识点】三角形的外角定义及性质

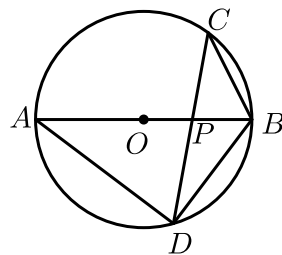
【能力】推理论证能力

【重点强调】

2016年天津中考真题第21题10分

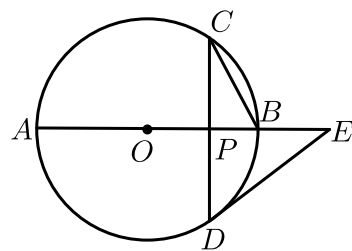
13. 在 $\odot O$ 中，弦 CD 与直径 AB 相交于点 P ， $\angle ABC = 63^\circ$ 。

(1) 如图①，若 $\angle APC = 100^\circ$ ，求 $\angle BAD$ 和 $\angle CDB$ 的大小。



图①

(2) 如图②，若 $CD \perp AB$ ，过点 D 作 $\odot O$ 的切线，与 AB 的延长线相交于点 E ，求 $\angle E$ 的大小。



图②

【答案】(1) 37° ; 27° .

(2) 36° .

【解析】(1) $\because \angle APC$ 是 $\triangle PBC$ 的一个外角, $\angle ABC = 63^\circ$, $\angle APC = 100^\circ$,

$$\therefore \angle C = \angle APC - \angle PBC = 37^\circ,$$

$\because$ 在 $\odot O$ 中, $\angle BAD = \angle C$,

$$\therefore \angle BAD = 37^\circ.$$

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

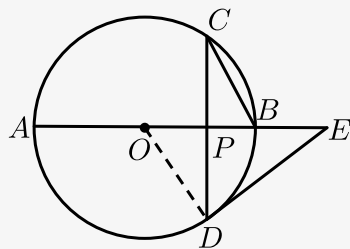
$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$\because$ 在 $\odot O$ 中, $\angle ADC = \angle ABC = 63^\circ$,

$$\text{又 } \angle CDB = \angle ADB - \angle ADC,$$

$$\therefore \angle CDB = 27^\circ.$$

(2) 如图, 连接 OD ,



$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore \angle CPB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PCB = 90^\circ - \angle PBC = 27^\circ,$$

$\because$ 在 $\odot O$ 中, $\angle BOD = 2\angle BCD$,

$$\therefore \angle BOD = 54^\circ,$$

$\because DE$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore OD \perp DE, \text{ 即 } \angle ODE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 90^\circ - \angle EOD,$$

$$\therefore \angle E = 36^\circ.$$

【重点强调】

2020年天津中考真题第21题

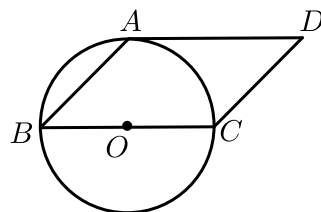
二、未知角度求角度

1. 圆与四边形

 典题精炼

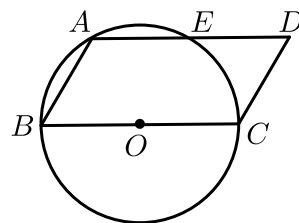
14. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且以 BC 为直径的 $\odot O$ 经过点 A .

(1) 如图①，若 AD 与 $\odot O$ 相切，求 $\angle ABC$ 的度数.



图①

(2) 如图②，若 AD 与 $\odot O$ 相交，交点 E 为 AD 的中点，求 $\angle ABC$ 的度数.

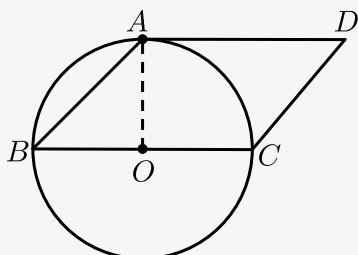


图②

【答案】(1) 45° .

(2) 60° .

【解析】(1) 如图①，连接 AO ,



图①

$\because AD$ 与 $\odot O$ 相切于点 A ,
 $\therefore OA \perp AD$,
 $\therefore \angle OAD = 90^\circ$,
 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 ,
 $\therefore AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle OAD + \angle AOC = 180^\circ$,
 $\therefore \angle AOC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = 45^\circ$.

(2) 如图② , 连接 AO , EO ,

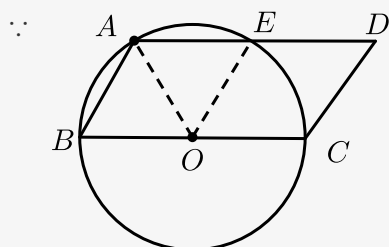


图 ②

BC 是 $\odot O$ 的直径 ,
 $\therefore BC = 2OB$,
 $\because E$ 为 AD 的中点 ,
 $\therefore AD = 2AE$,
 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 ,
 $\therefore AD = BC$,
 $\therefore OB = AE$,
 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 ,
 $\therefore AD \parallel BC$,
 $\therefore$ 四边形 $ABOE$ 是平行四边形 ,
 $\therefore \angle ABC = \angle AEO$,
 $\because OA, OE, OB$ 是 $\odot O$ 的半径 ,
 $\therefore OA = OE = OB = AE$,
 $\therefore \triangle OAE$ 是等边三角形 ,
 $\therefore \angle AEO = 60^\circ$,
 $\therefore \angle ABC = 60^\circ$.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】切线的性质定理

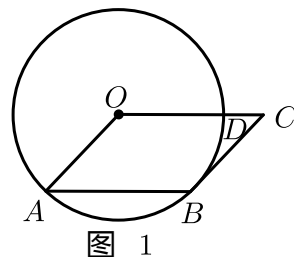
【知识点】圆的定义

【知识点】圆中对称性

【重点强调】

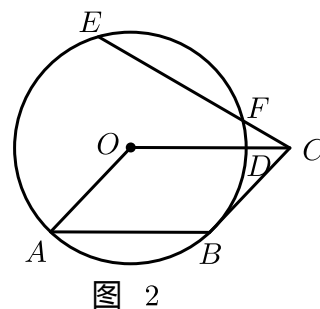
2017年天津西青区初三一模第21题10分

15. 如图1, 在平行四边形 $OABC$ 中, 以 O 为圆心, OA 为半径的圆与 BC 相切于点 B , 与 OC 相交于点 D .



(1) 求 $\angle AOC$ 的度数.

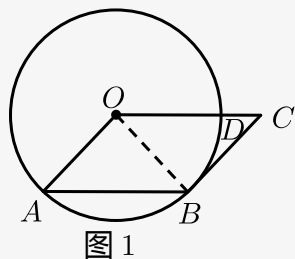
(2) 如图2, 点 E 在 $\odot O$ 上, 连接 CE 与 $\odot O$ 交于点 F , 若 $EF = AB$, 求 $\angle OCE$ 的度数.



【答案】(1) 135° .

(2) 30° .

【解析】(1) 如图1, 连接 OB ,



$\because BC$ 是圆的切线,

$\therefore OB \perp BC$,

$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,

$\therefore OA \parallel BC$,

$\therefore OB \perp OA$,

$\therefore \triangle AOB$ 是等腰直角三角形,

(2) 如图2, 经过点O作CD的平行线, 与AB交于点E, 与 $\widehat{AB}$ 交于点F, 连接AF, 求 $\angle FAB$ 的大小.

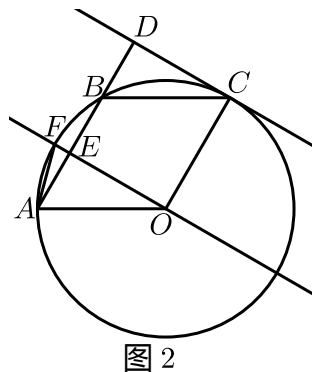


图 2

【答案】(1) $\angle ADC = 90^\circ$.

(2) $\angle FAB = 15^\circ$.

【解析】(1) $\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线, C 为切点,

$\therefore OC \perp CD$, 即 $\angle OCD = 90^\circ$.

$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel OC$, 即 $AD \parallel OC$,

$\therefore \angle ADC + \angle OCD = 180^\circ$.

$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle OCD = 90^\circ$.

(2) 如图, 连接 OB , 则 $OB = OA = OC$.

$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,

$\therefore OC = AB$,

$\therefore OA = OB = AB$, 即 $\triangle AOB$ 是等边三角形.

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$.

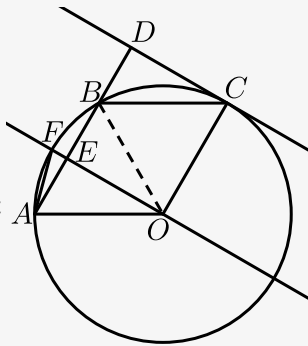
由 $OF \parallel CD$, 又 $\angle ADC = 90^\circ$,

得 $\angle AEO = \angle ADC = 90^\circ$.

$\therefore OF \perp AB$, 有 $\widehat{BF} = \widehat{AF}$,

$\therefore \angle FOB = \angle FOA = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ$.

$\therefore \angle FAB = \frac{1}{2} \angle FOB = 15^\circ$.



【标注】【知识点】圆内接四边形综合

【重点强调】

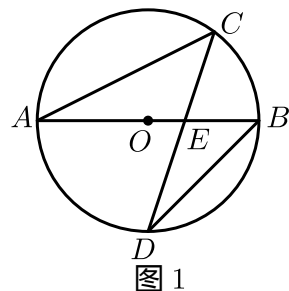
2015年天津中考真题第21题10分

2. 圆与三角形

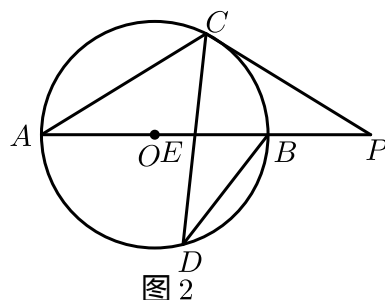
典题精练

17. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C, D 在 $\odot O$ 上， CD 与 AB 交于点 E ，连接 BD 。

(1) 如图1，若点 D 是弧 AB 的中点，求 $\angle C$ 的大小。



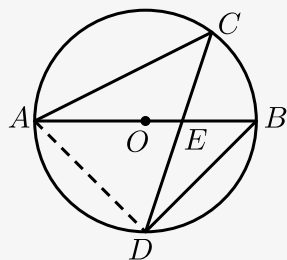
(2) 如图2，过点 C 作 $\odot O$ 的切线与 AB 的延长线交于点 P ，若 $AC = CP$ ，求 $\angle D$ 的大小。



【答案】(1) 45° 。

(2) 30° 。

【解析】(1) 连接 AD ，

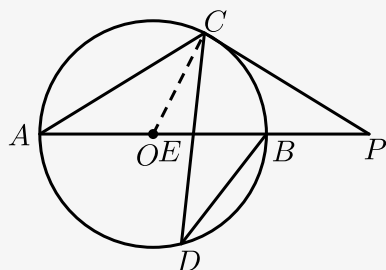


$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，
 $\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ，
 $\because D$ 是弧 AB 的中点，
 $\therefore \text{弧} AD = \text{弧} BD$ ，
 $\therefore AD = BD$ ，
 $\therefore \triangle ABD$ 是等腰直角三角形，
 $\therefore \angle ABD = 45^\circ$ ，

又 $\because \angle C = \angle ABD$,

$\therefore \angle C = 45^\circ$.

(2) 连接 OC ,



$\because CP$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OCP = 90^\circ$,

$\because AC = CP$,

$\therefore \angle A = \angle P$,

$\because \angle COP = 2\angle A$,

$\therefore \angle COP = 2\angle P$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle OPC$ 中, $\angle COP + \angle P = 90^\circ$,

$\therefore 2\angle P + \angle P = 90^\circ$,

$\therefore \angle P = 30^\circ$,

$\therefore \angle A = 30^\circ$,

$\therefore \angle D = \angle A = 30^\circ$.

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

【重点强调】

2019年天津滨海新区初三二模第21题10分

18. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 是 $\odot O$ 的弦.

(1) 如图1, 连接 AC , AD , 若 $\angle ADC = 55^\circ$, 求 $\angle CAB$ 的大小.

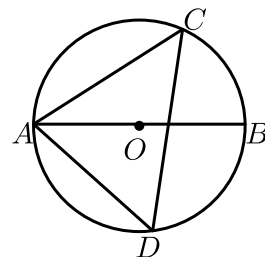


图1

(2) 如图2, C 是半圆弧 AB 的中点, AD 的延长线与过点 B 的切线相交于点 P , 若 $CD = \frac{1}{2}AB$, 求 $\angle APB$ 的大小.

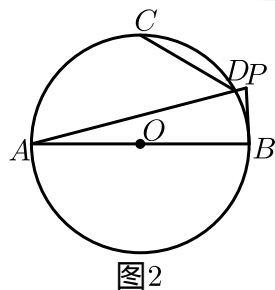
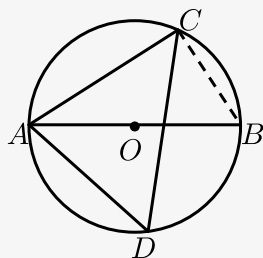


图2

【答案】(1) 35° .

(2) 75° .

【解析】(1) 如图，连接 CB ,



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径 ,

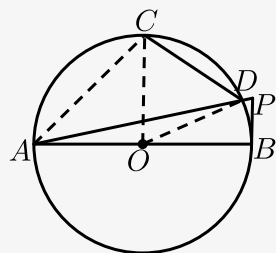
$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAB + \angle ABC = 90^\circ$,

由 $\angle ADC = 55^\circ$, 得 $\angle ABC = 55^\circ$,

$\therefore \angle CAB = 90^\circ - \angle ABC = 35^\circ$.

(2) 如图，连接 AC , OC , OD ,



$\because CD = \frac{1}{2} AB = OC = OD$,

$\therefore \triangle COD$ 是等边三角形 ,

$\therefore \angle COD = 60^\circ$,

$\therefore \angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD = 30^\circ$,

$\because C$ 是半圆弧 AB 的中点 ,

$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC}$,

$\therefore \angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$,

又 $AO = CO$, 得 $\angle CAO = \angle ACO = 45^\circ$,

则 $\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 15^\circ$,

由 BP 切 $\odot O$ 于点 B ,

得 $BP \perp AB$, 即 $\angle ABP = 90^\circ$,

$\therefore \angle APB = 90^\circ - \angle BAP = 75^\circ$.

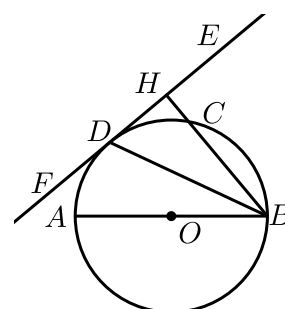
【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

【重点强调】

2020年天津武清区初三一模第21题10分

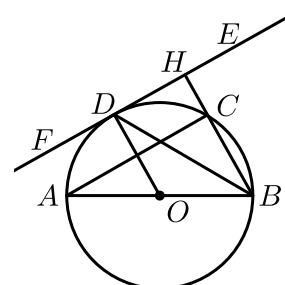
19. 已知 AB 为 $\odot O$ 的直径, EF 切 $\odot O$ 于点 D , 过点 B 作 $BH \perp EF$ 于点 H , 交 $\odot O$ 于点 C , 连接 BD .

(1) 如图①, 若 $\angle BDH = 65^\circ$, 求 $\angle ABH$ 的大小.



图①

(2) 如图②, 若 C 为 $\widehat{BD}$ 的中点, 求 $\angle ABH$ 的大小.



图②

【答案】 (1) 50° .

(2) 60° .

【解析】 (1) 如图③, 连接 OD .

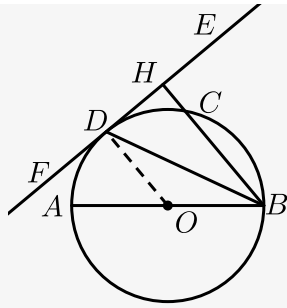


图 ③

$\because O$ 为圆心, EF 切 $\odot O$ 于点 D ,
 $\therefore OD \perp EF$,
 又 $BH \perp EF$,
 $\therefore OD \parallel BH$,
 $\therefore \angle ODB = \angle DBH$,
 $\because OB = OD$,
 $\therefore \angle ODB = \angle OBD$,
 $\therefore \angle DBH = \angle OBD$,
 $\because \angle DBH = 90^\circ - \angle BDH = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$,
 $\therefore \angle ABH = 2\angle DBH = 50^\circ$.

(2) 连接 OD 、 OC 、 CO , 如图④,

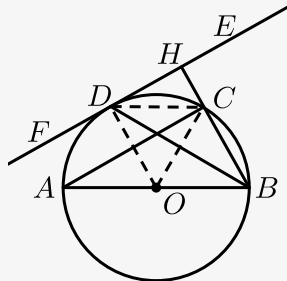


图 ④

$\because C$ 为 $\widehat{BD}$ 的中点,
 $\therefore \angle COD = \angle COB$,
 $\because OD \parallel BH$,
 $\therefore \angle COD = \angle OCB$,
 $\therefore \angle OCB = \angle COB$,
 $\because OB = OC$,
 $\therefore \angle OBC = \angle OCB$,
 $\therefore \angle OBC = \angle OCB = \angle COB$,
 $\because \angle OBC + \angle OCB + \angle COB = 180^\circ$,
 $\therefore \angle OBC = 60^\circ$,

即 $\angle ABH = 60^\circ$.

【标注】【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

【知识点】切线的性质定理

【知识点】圆周角定理以及应用

【思想】数形结合思想

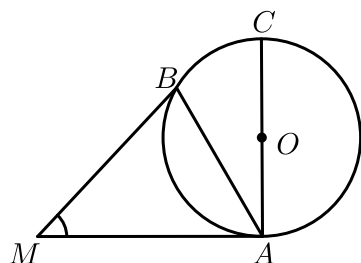
【重点强调】

2019年天津红桥区初三一模第21题10分

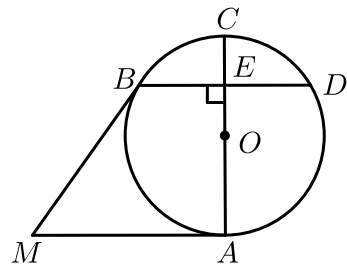
💡 经典再现

20. 已知 $\odot O$ 中, AC 为直径, MA 、 MB 分别切 $\odot O$ 于点 A 、 B .

(1) 如图, 若 $\angle BAC = 25^\circ$, 求 $\angle AMB$ 的大小 .



(2) 如图, 过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 E , 交 $\odot O$ 于点 D , 若 $BD = MA$, 求 $\angle AMB$ 的大小 .



【答案】(1) 50° .

(2) 60° .

【解析】(1) $\because MA$ 切 $\odot O$ 于点 A , 有 $\angle MAC = 90^\circ$.

又 $\angle BAC = 25^\circ$,

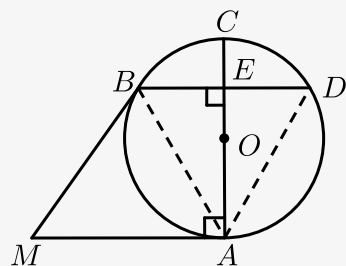
$\therefore \angle MAB = \angle MAC - \angle BAC = 65^\circ$.

$\because MA$ 、 MB 分别切 $\odot O$ 于点 A 、 B ,

$\therefore MA = MB$, 有 $\angle MAB = \angle MBA$.

$\therefore \angle AMB = 180^\circ - (\angle MAB + \angle MBA) = 50^\circ$.

(2) 如图 , 连接 AD 、 AB .



$\because MA \perp AC$, 又 $BD \perp AC$,

$\therefore BD \parallel MA$.

又 $BD = MA$,

$\therefore$ 四边形 $MADB$ 是平行四边形 .

$\because MA = MB$,

$\therefore$ 四边形 $MADB$ 是菱形 , 有 $AD = BD$.

又 AC 为直径 , $AC \perp BD$, 得 $\widehat{AB} = \widehat{AD}$, 有 $AB = AD$.

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形 , 有 $\angle D = 60^\circ$.

$\therefore$ 在菱形 $MADB$ 中 , $\angle AMB = \angle D = 60^\circ$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】正多边形与圆

【知识点】圆内接四边形综合

【知识点】切线的性质定理

【重点强调】

2012年天津中考真题第22题